## 5.14 Dimensionsformeln

$V, V_1, V_2$ endlich-erzeugte VR
$U, U_1, U_2$ UVR von $V$

(a) $\dim U \leq \dim V$, und
$\dim U = \dim V \iff U = V$

(Insbesondere ist auch $U$ endlich-erzeugt.)

(b) $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$

(c) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

(d) $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

## 5.15 Notiz:

Ist $(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_\ell)$ linear unabh., so ist

$$\langle \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\} \rangle \cap \langle \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_\ell\} \rangle = \{\underline{0}\}$$

**Beweis:**

Sei $\underline{v} \in \langle\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\}\rangle \cap \langle\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_\ell\}\rangle$.

Dann ist
$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \underline{a}_i = \sum_{j=1}^{\ell} s_j \cdot \underline{b}_j$$
für gewisse $r_i, s_j \in K$. Also ist
$$\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \underline{a}_i + \sum_{j=1}^{\ell} (-s_j) \cdot \underline{b}_j = \underline{0}$$
Wegen linearer Unabhängigkeit folgt: $r_i = 0$, $s_j = 0$ $\forall i, j$

also $\underline{v} = \underline{0}$. $\square$

**Beweis zu 5.14:**

**(a)** Ergänze eine Basis $\mathcal{B}$ von $U$ zu einer Basis $\mathcal{B}'$ von $V$.

($\Leftarrow$) ✓

($\Rightarrow$) Länge von $\mathcal{B}'$ = Länge von $\mathcal{B}$,

also $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$,

also $V = \langle \mathcal{B}' \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle = U$.

**(b)** Wähle Basis
$$\mathcal{B}_U = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d) \quad \text{von } U$$
und ergänze zu Basis
$$\mathcal{B}_V = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k) \text{ von } V.$$

**Beh:** $([\underline{e}_1], \dots, [\underline{e}_k])$ ist Basis von $V/U$.

Erzeugendensystem:

Jedes $[\underline{v}] \in V/U$ lässt sich schreiben als

$$[\underline{v}] = \left[\sum_{i=1}^{d} r_i \underline{b}_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \underline{e}_j\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{d} r_i \underbrace{[\underline{b}_i]}_{=[\underline{0}]} + \sum_{j=1}^{k} s_j [\underline{e}_j]$$

da $\underline{b}_i \in U$

$$= \sum_{j=1}^{k} s_j [\underline{e}_j]$$

linear unabhängig:

Sei $\sum_{j=1}^{k} s_j [\underline{e}_j] = [\underline{0}]$ in $V/U$

$$\sum_{j=1}^{k} s_j [\underline{e}_j] = \left[\sum_{j=1}^{k} s_j \underline{e}_j\right]$$

Dann ist $\sum_{j=1}^{k} s_j \underline{e}_j \in U$,

also $\sum_{j=1}^{k} s_j \underline{e}_j \in \underbrace{\langle \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d\} \rangle \cap \langle \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\} \rangle}_{\{\underline{0}\} \text{ nach } 5.15}$

Also $\sum_{j=1}^{k} s_j \underline{e}_j = \underline{0}$ in $V$.

Da $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$ linear unabhängig in $V$, folgt $s_1 = \dots = s_k = 0$.

(c) Vergleiche: für endliche Teilmengen $A_1, A_2$ einer Menge gilt:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Wähle Basis $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$ von $U_1 \cap U_2$.

Ergänze zu Basen

$(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ von $U_1$

$(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_l)$ von $U_2$.

**Beh:** $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_l)$ ist eine Basis von $U_1 + U_2$.

Erzeugendensystem: Übung.

linear unabhängig:

Angenommen

$$(*) \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{d} r_i \underline{b}_i + \sum_{i=1}^{k} s_i \underline{v}_i}_{\in U_1} + \sum_{i=1}^{l} t_i \underline{w}_i = \underline{0}$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{l} t_i \underline{w}_i \in \underbrace{U_1}_{\text{wegen } (*)} \cap \underbrace{U_2}_{\text{klar}} = \langle \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d\} \rangle$$

Also $\sum_{i=1}^{\ell} t_i \underline{w}_i \in \underbrace{\langle\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_d\}\rangle \cap \langle\{\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_\ell\}\rangle}_{\{\underline{0}\} \text{ nach } 5.15.}$.

Also $\sum_{i=1}^{\ell} t_i \underline{w}_i = \underline{0}$, und da $(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_\ell)$ linear unabhängig, folgt $t_1 = \dots = t_\ell = 0$.

Setze dies ein in $(*)$.

Da $(\underline{b}_1,\dots,\underline{v}_k)$ Basis von $U_1$, folgt dann auch $r_1 = \dots = r_d = 0$ und $s_1 = \dots = s_k = 0$.

(d) Option A: Wende (c) an auf

$$\underbrace{V_1}_{U_1} \hookrightarrow \underbrace{V_1 \oplus V_2}_{V} \qquad \underbrace{V_2}_{U_2} \hookrightarrow V_1 \oplus V_2$$
$$\underline{v} \mapsto (\underline{v}, \underline{0}) \qquad \underline{v} \mapsto (\underline{0}, \underline{v})$$

Option B:
Wähle Basis $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_k)$ von $V_1$,
$(\underline{b}'_1,\dots,\underline{b}'_\ell)$ von $V_2$,

und prüfe, dass

$$((\underline{b}_1, \underbrace{\underline{0}}_{\text{aus } V_2}),\dots,(\underline{b}_k,\underline{0}),(\underbrace{\underline{0}}_{\text{aus } V_1},\underline{b}'_1),\dots,(\underline{0},\underline{b}'_\ell))$$

Basis ist von $V_1 \oplus V_2$. $\square$